Элементы теории множеств. Отношения и отображения

`Множество` — совокупность объектов любой природы. Обозначения: $A, B, C, X, Y, \ldots$ или $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{x\}, \{y\}, \ldots$.

Парадокс Рассела. Назовем множество *странным*, если оно содержит самого себя в качестве элемента. Множества, которые не являются собственными элементами назовем *обычными.* Пусть T — множество всех обычных множеств (и только их). Вопрос: является ли множество T странным или обычным? Если оно является странным, то не должно быть своим элементом. Но тогда оно обычное. Но если оно обычное, то должно содержать себя в качестве элемента, а тогда оно странное. Парадокс.

Вывод: не любая фраза задает множество. Множество — многое, мыслимое нами как целое (Георг Кантор). Тем не менее, в нашем курсе наивного определения множества будет достаточно.

Объекты, образующие данное множество, называются его `элементами (точками)`. Обозначаются: $a, b, c, x, y, \ldots$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ или $A \ni a$ (A `содержит` a). Если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Определение 1. *Множества A и B называются* ***равными****, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$.*

Определение 2. *Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то A называется* ***подмножеством*** *B. Обозначение $A \subset B$ или $B \supset A$.*

Определение 3. *Множество, не содержащее ни одного элемента, называется* ***пустым*** *и обозначается символом $\emptyset$.*

Если множество A состоит из элементов a, удовлетворяющих некоторому свойству α, то пишут $A = \{a \,|\, \alpha\}$. Например, $\emptyset = \{a \,|\, a \neq a\}$.

Определение 4. *Множество C называется* ***объединением*** *множеств A и B, если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.*

$C = A \cup B = \{x \,|\, x \in A \,\textit{или}\, x \in B\}$.

Определение 5. *Множество C называется* ***пересечением*** *множеств A и B, если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.*

$C = A \cap B = \{x \,|\, x \in A \,\textit{и}\, x \in B\}$.

Определение 6. *Множество C называется* ***разностью*** *множеств A и B, если оно состоит из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

$C = A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \,\textit{и}\, x \notin B\}$.

Определение 7. *Множество C называется* ***симметрической разностью*** *множеств A и B, если $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

Обозначение: $C = A \triangle B$.

Перечислим некоторые свойства введенных выше операций над множествами:

1) $A \subset A \; \forall A$;

2) $A \subset B$, $B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

3) $A \subset B$, $B \subset A \Rightarrow A = B$;

4) $\emptyset \subset A \; \forall A$;

5) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset \; \forall A$;

6) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

7) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

8) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

9) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

10) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

11) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

12) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

13) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Докажем, например, свойство 11).

Обозначим $X = A \setminus (B \cap C)$; $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Пусть $x \in X$. Тогда $x \in A$ и $x \notin (B \cap C)$. Значит, есть две возможности: 1) $x \in A$ и $x \notin B$, тогда $x \in A \setminus B$; 2) $x \in A$ и $x \notin C$, тогда $x \in A \setminus C$. И в том, и в другом случае получаем, что $x \in Y$. Поскольку x — произвольный элемент множества X, то по определению $X \subset Y$.

Пусть теперь $x \in Y$. Тогда $x \in (A \setminus B)$ или $x \in (A \setminus C)$. Если $x \in (A \setminus B)$, то $x \in A$ и $x \notin B$; следовательно, $x \in A$ и $x \notin (B \cap C)$, то есть $x \in X$. Случай $x \in (A \setminus C)$ рассматривается аналогично. Получили, что любой элемент множества Y принадлежит множеству X, то есть $Y \subset X$.

Окончательно, так как $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$.

Упражнение 1. *Докажите свойства 9), 10), 12) и 13).*

Определение 8. ***Декартовым произведением*** *множеств A и B называется множество всех возможных пар (a, b) таких, что $a \in A$ и $b \in B$.*

$C = A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \, и \, b \in B\}$.

Определение 9. *Любое подмножество $\mathcal{R}$ декартова произведения $A \times B$ называется* ***(бинарным) отношением.***

Будем писать $(a, b) \in \mathcal{R}$ или $a\mathcal{R}b$ и говорить, что a и b *связаны отношением* $\mathcal{R}$.

Пример 1. *Отношение равенства — это отношение $\mathcal{I} \subset A \times A$, т.ч. $\mathcal{I} = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Пишут $a = b$.*

Определение 10. *Множество $\mathcal{R}^{-1} \subset B \times A$ называется* ***обратным отношением*** *к отношению $\mathcal{R} \subset A \times B$, если $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$.*

Некоторые отношения называются отображениями или функциями.

Определение 11. *Подмножество $\mathcal{F}$ декартова произведения $A \times B$ называется* ***отображением*** *множества A в множество B, если для любого элемента a из множества A существует единственная пара $(a,b) \in \mathcal{F}$. Обозначение: $\mathcal{F} : A \to B$.*

Пример 2. *Пусть $A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,4,5\}$. Тогда отношение $\mathcal{F} = \{(1,3),(2,2),(3,3)\}$ — отображение, а отношение $\Phi = \{(2,2),(2,3),(3,4)\}$ — нет.*

Определение 12. *Пусть $\mathcal{F}$ — отображение множества A в множество B. Тогда* ***образом*** *элемента $a \in A$ при отображении $\mathcal{F}$ называется такой элемент $b \in B$, что $(a,b) \in \mathcal{F}$. Элемент a называется* ***прообразом*** *(одним из возможных) элемента b. Обозначение: $b = \mathcal{F}(a)$.*

Множество $\mathcal{F}(A) = \{b \in B \,|\, b = \mathcal{F}(a), a \in A\}$ называется ***образом множества*** *A при отображении $\mathcal{F}$.*

Определение 13. *Отображение $\mathcal{F}$ называется* ***сюръекцией*** *или* ***отображением "на"****, если $\mathcal{F}(A) = B$.*

Отображение $\mathcal{F}$ называется ***инъекцией*** *или* ***вложением****, если из условия $\mathcal{F}(a_1) = \mathcal{F}(a_2)$ следует $a_1 = a_2$.*

Отображение $\mathcal{F}$ называется ***биекцией*** *или* ***взаимно однозначным отображением****, если оно является сюръекцией и инъекцией одновременно.*

Пример 3. *Пусть отображение $\mathcal{F} \subset X \times Y$ — это функция, заданная по правилу $y = \mathcal{F}(x) = x^2$. Рассмотрим различные варианты выбора множеств X и Y.*

- *Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ не является сюръекцией (у отрицательных чисел нет прообразов) и не является инъекцией (числа x и $-x$ переходят в один и тот же элемент x^2).*
- *Пусть $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,+\infty)$. Тогда $\mathcal{F}$ является сюръекцией, но не является инъекцией.*
- *Пусть $X = [0,+\infty)$, $Y = [0,+\infty)$. Тогда $\mathcal{F}$ — биекция.*

Утверждение 1. *Если $\mathcal{F}$ — биекция, то обратное отношение $\mathcal{F}^{-1}$ — тоже биекция.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}$ — биекция, то для любого $b \in B$ существует единственная пара (b,a) такая, что $(a,b) \in \mathcal{F}$ (существует, поскольку $\mathcal{F}$ — сюръекция, единственная, поскольку $\mathcal{F}$ — инъекция). Значит, обратное отношение является отображением. При этом оно является сюръекцией, так как для любого $a \in A$ найдется пара $(a,b) \in \mathcal{F}$ (а значит, и пара $(b,a) \in \mathcal{F}^{-1}$); оно является инъекцией, поскольку у любого $a \in A$ существует единственный образ $b \in B$ при отображении $\mathcal{F}$. □

Отметим, что если $\mathcal{F}$ — не инъекция, то обратное отношение не является отображением (при обратном отображении какой–то элемент должен перейти в два различных, что невозможно). Если $\mathcal{F}$ — инъекция, но не сюръекция, то обратное отображение определено не на всем множестве B. Несложно показать, что если A и B — конечные множества, то между ними можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового количества переменных.

Будем теперь рассматривать отношения на одном и том же множестве A, то есть $\mathcal{R} \subset A \times A$.

Определение 14. *Отношение $\mathcal{R} \subset A \times A$ называется* **рефлексивным**, *если $(x, x) \in \mathcal{R}$ для всех $x \in A$. Оно называется* **симметричным**, *если из того, что $(x, y) \in \mathcal{R}$, следует, что $(y, x) \in \mathcal{R}$. Отношение называется* **транзитивным**, *если из того, что $(x, y) \in \mathcal{R}$ и $(y, z) \in \mathcal{R}$, следует, что $(x, z) \in \mathcal{R}$.*

Пример 4. *Пусть A — множество всех вещественных чисел. Отношение «$=$» рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отношение «$\leq$» рефлексивно и транзитивно, но не симметрично. Отношение «$<$» транзитивно, но не симметрично и не рефлексивно.*

Определение 15. *Отношение, которое является рефлексивным, симметричным и транзитивным одновременно, называется* **отношением эквивалентности**. *Обозначается $\sim$. Говорят, что элементы x и y* **лежат в одном классе эквивалентности**, *если $x \sim y$.*

Утверждение 2. *Любое отношение эквивалентности на множестве A разбивает его на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 — два различных класса эквивалентности. Тогда найдется элемент $x \in A$, $x \in A_1$ и $x \notin A_2$. Предположим, что $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, тогда существует $y \in A$, т.ч. $y \in A_1 \cap A_2$. Получаем, что y одновременно эквивалентен и не эквивалентен x — противоречие. $\square$

Определение 16. *Отношение $\mathcal{R}$ на множестве A называется* **отношением порядка**, *если оно рефлексивно, транзитивно и* **антисимметрично**, *то есть из того, что $(x, y) \in \mathcal{R}$, $x \neq y$, следует, что $(y, x) \notin \mathcal{R}$. Множество A, на котором введено отношение порядка, называется* **частично упорядоченным множеством**. *Порядок $\mathcal{R}$ называется* **линейным**, *если для любых $x, y \in A$ либо $(x, y) \in \mathcal{R}$, либо $(x, y) \in \mathcal{R}$.*

Классический пример отношения порядка — отношение «$\leq$» на множестве действительных чисел.

Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества. Мощность континуума.

Обозначения: $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел; $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел; $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.

Очевидно, что $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Определение 17. *Множества A и B называются* **эквивалентными (равномощными)**, *если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $A \sim B$.*

Упражнение 2. *Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности (например, на множестве $\mathcal{A}$ всех подмножеств множества $\mathbb{R}$).*

Утверждение 3. *Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ эквивалентно множеству целых чисел $\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Установить эквивалентность какого-либо множества с множеством натуральных чисел — все равно, что пронумеровать его элементы. Занумеруем целые числа следующим образом:

$$z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = -1,\ z_4 = 2,\ z_5 = -2,\ z_6 = 3,\ z_7 = -3, \ldots .$$

□

Утверждение 4. *Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ эквивалентно множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Пусть r — рациональное число. Тогда $r = \dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, причем p и q — взаимно простые числа. Обозначим $h = |p| + q$ — высота числа r (очевидно, что $h \in \mathbb{N}$). Если $h > 1$ — фиксировано, то $q = 1, 2, \ldots, h - 1$. Если числа h и q фиксированы, то $p = \pm(h - q)$.

Будем теперь нумеровать рациональные числа по возрастанию высоты h; при фиксированной высоте — по возрастанию q; при фиксированных h и q — по возрастанию p. Тогда

$$r_1 = \frac{0}{1}, \quad (h = 1)$$

$$r_2 = \frac{-1}{1}, \quad r_3 = \frac{1}{1}, \quad (h = 2)$$

$$r_4 = \frac{-2}{1}, \quad r_5 = \frac{2}{1}, \quad r_6 = \frac{-1}{2}, \quad r_7 = \frac{1}{2}, \quad (h = 3)$$

$$\ldots$$

□

Определение 18. *Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется* **счетным** *множеством.*

Утверждение 5. *Всякое непустое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Доказательство. Занумеруем элементы множества; затем перенумеруем элементы подмножества в порядке возрастания номеров. □

Утверждение 6. *Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}$$

$$\ldots$$

Обозначим их объединение через $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ и занумеруем элементы следующим образом:

$$a_1 = a_{11},\ a_2 = a_{21},\ a_3 = a_{12},\ a_4 = a_{13},\ a_5 = a_{22},\ a_6 = a_{31},\ a_7 = a_{41},\ a_8 = a_{32},\ a_9 = a_{23}, \dots$$

(так называемый «диагональный» процесс). $\square$

Теорема 1. *Множество H всех бесконечных наборов, состоящих из цифр 0 и 1, не является счетным.*

Доказательство. Предположим противное: пусть множество H счетно. Занумеруем его элементы: $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}$. При этом

$$h_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, \dots),$$

$$h_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, \dots),$$

$$\dots$$

$$h_n = (h_{n1}, h_{n2}, h_{n3}, \dots),$$

$$\dots$$

где $h_{ij} = 0$ или 1. Обозначим через h следующий бесконечный набор из нулей и единиц: $h = (h_{11}, h_{22}, h_{33}, \dots, h_{nn}, \dots)$. Пусть теперь $\overline{h} = (\overline{h_{11}}, \overline{h_{22}}, \overline{h_{33}}, \dots, \overline{h_{nn}}, \dots)$, где $\overline{h_{kk}} = \begin{cases} 0, & h_{kk} = 1, \\ 1, & h_{kk} = 0, \end{cases}$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда получаем, что $\overline{h} \neq h_j$ ни при каком $j \in \mathbb{N}$ (действительно, если $\overline{h} = h_j$, то $\overline{h_{jj}} = h_{jj}$, а это не так по построению $\overline{h}$). Значит, мы нашли набор из нулей и единиц, не содержащийся в H. Но по условию H — множество всех таких бесконечных наборов. Значит, наше предположение неверно, и множество H не является счетным. $\square$

Теорема 2. *Множество всех бесконечных наборов, состоящих из цифр $0, 1, \dots, 9$, не является счетным.*

Доказательство. Если бы это множество было счетным, то и его подмножество H было бы счетным, а это не так. $\square$

Теорема 3 (Кантор)**.** *Совокупность $\Omega(X)$ всех подмножеств любого множества X сама образует множество, не эквивалентное X.*

Доказательство. Примем без доказательства, что $\Omega(X)$ — множество. Докажем, что оно не эквивалентно X. Предположим противное, тогда существует биекция $f : X \to \Omega(X)$. Рассмотрим множество $A = \{x \in X \,:\, x \notin f(x)\}$. Очевидно, что $A \subset X$, значит, существует $y \in X$, т. ч. $f(y) = A$ (поскольку f — биекция).

Теперь посмотрим, принадлежит ли элемент y множеству A. Если $y \in A$, то $y \in f(y)$, но тогда по определению множества A имеем, что $y \notin A$. Если же $y \notin A$, то $y \notin f(y)$, а тогда по определению $y \in A$. В любом случае получаем противоречие. $\square$

Замечание 1. *Множество I всех точек отрезка $[0, 1]$ эквивалентно множеству всех бесконечных наборов, состоящих из цифр $0, 1, \ldots, 9$ (ниже будет показано, что любая точка x множества I может быть записана в виде $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$, где $x_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $k = 1, 2, \ldots$).*

Определение 19. ***Мощностью множества*** *называется характеристика этого множества, которая обозначается $|A|$ (или $\#A$, или $card(A)$) и обладает свойствами:*

- *если A — пусто или конечно, то $|A|$ =число элементов A;*
- *$|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда $A \sim B$;*
- *$|A| < |B|$ тогда и только тогда, когда A и B не эквивалентны, но при этом $A \sim C$ для некоторого $C \subset B$.*

Определение 20. *Любое множество, эквивалентное множеству I, называется множеством* ***мощности континуума****.*

Упражнение 3. *Докажите, что множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.*

Вещественные числа и правила их сравнения.

Определение 21. ***Рациональным*** *называется число, представимое в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное.*

Свойства рациональных чисел:

1) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$: $a < b$ или $a > b$ или $a = b$ (правило упорядочения);

2) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$ существует единственное число $c \in \mathbb{Q}$: $c = a + b$ (корректность определения суммы);

3) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$ существует единственное число $c \in \mathbb{Q}$: $c = a \cdot b$ (корректность определения произведения);

4) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (транзитивность);

5) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$: $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

6) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);

7) существует единственное число $0 \in \mathbb{Q}$: $a + 0 = 0 + a = a$ для любого $a \in \mathbb{Q}$ (существование нейтрального элемента по сложению);

8) для любого числа $a \in \mathbb{Q}$ существует единственное число $a' \in \mathbb{Q}$: $a + a' = 0$ (существование обратного элемента по сложению);

9) для любых чисел $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);

10) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

11) существует единственное число $1 \in \mathbb{Q}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого $a \in \mathbb{Q}$ (существование нейтрального элемента по умножению);

12) для любого числа $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, существует единственное число $a' \in \mathbb{Q}$: $a \cdot a' = 1$ (существование обратного элемента по умножению);

13) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность);

14) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: если $a > b$, то $a + c > b + c$;

15) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$: если $a > b$, $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$;

16) Каково бы ни было число $a \in \mathbb{Q}$, можно число 1 повторить столько раз, что сумма превзойдет a (аксиома Архимеда).

Введем понятие вещественного числа. Нам будет удобно использовать следующую геометрическую иллюстрацию: рассмотрим прямую, выберем на ней точку O (начало отсчета) и масштабный отрезок OM (его длина $|OM| = 1$). Пусть A — произвольная точка на этой прямой. Рассмотрим сначала случай, когда A лежит правее, чем O. Выясним, сколько раз отрезок OM укладывается в отрезок OA.

1) Целое число a_0 раз без остатка. Тогда поставим точке A в соответствие бесконечную десятичную дробь $a_0 = a_0,000\ldots$.

2) Целое число a_0 раз с остатком O_1A, $|O_1A| < |OM|$. Тогда выясним, сколько раз одна десятая часть отрезка OM укладывается в отрезок O_1A.

2.1) Целое число a_1 раз без остатка. Тогда поставим точке A в соответствие бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1 = a_0, a_1 00\ldots$.

2.2) Целое число a_1 раз с остатком O_2A, $|O_2A| < \dfrac{1}{10}|OM|$. Тогда выясним, сколько раз одна сотая часть отрезка OM укладывается в отрезок O_2A и т.д.

Таким образом, каждой точке A, лежащей на прямой (правее O), ставится в соответствие либо конечная десятичная дробь $(+)a_0, a_1a_2\ldots a_n = (+)a_0, a_1a_2\ldots a_n000\ldots$, либо бесконечная $(+)a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Если точка A лежит левее точки O, то проводим ту же процедуру, но отрезки откладываем влево и перед соответствующей дробью ставим знак $-$. Точке O ставим в соответствие дробь $0 = 0,000\ldots$.

Замечание 2. *Можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех несократимых дробей вида $\dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}$, и множеством десятичных дробей вида $\pm a_0, a_1\ldots a_n000\ldots$ (конечные десятичные дроби) или вида $\pm a_0, a_1\ldots a_{k-1}(a_k\ldots a_n)$ (бесконечные периодические десятичные дроби). При этом будем отождествлять дроби вида $a_0, a_1\ldots a_n000\ldots$ и $a_0, a_1\ldots(a_n-1)999\ldots$ и всюду в дальнейшем использовать запись $a_0, a_1\ldots a_n000\ldots$. Дроби, являющиеся либо конечными, либо бесконечными периодическими, будем также называть рациональными числами.*

Определение 22. *Вещественными (действительными) числами будем называть бесконечные десятичные дроби. Число (не равное нулю) будем называть положительным (отрицательным), если перед ним стоит знак $+$ ($-$). Числа, не являющиеся положительными (отрицательными) будем называть неположительными (неотрицательными).*

Правила сравнения вещественных чисел.

Два вещественных числа $a = \pm a_0, a_1\ldots a_n\ldots$ и $b = \pm b_0, b_1\ldots b_n\ldots$ назывем равными, если они имеют один и тот же знак и $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_n = b_n$, ...

Пусть $a \neq b$. Будем считать, что

1) Любое положительное число больше нуля, отрицательное — меньше нуля.

2) Пусть $a > 0$, $b > 0$. Обозначим $k = \min\{n \mid a_n \neq b_n\}$, то есть $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k \neq b_k$. Тогда будем считать, что $a > b$, если $a_k > b_k$, и $a < b$, если $a_k < b_k$.

3) Пусть $a > 0$, $b < 0$. Тогда $a > b$.

4) Пусть $a < 0$, $b < 0$.

Определение 23. ***Модулем (абсолютной величиной)*** *числа $a \in \mathbb{R}$ называется неотрицательное число $|a|$, которое представляется той же десятичной дробью, что и a, но взятой всегда со знаком $+$.*

Для отрицательных чисел a и b будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$, и $a < b$, если $|a| > |b|$.

Утверждение 7. (Транзитивность знака $>$). *Пусть $a = a_0, a_1 \dots a_n \dots$, $b = b_0, b_1 \dots b_n \dots$, $c = c_0, c_1 \dots c_n \dots$ — вещественные числа. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.*

Доказательство. 1) Пусть сначала $c \geqslant 0$. Так как $b > c$, то по правилам сравнения получаем, что $b > 0$. Так как $a > b$, то и $a > 0$. Далее, поскольку $a > b$, то существует такой натуральный номер m, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... , $a_{m-1} = b_{m-1}$, $a_m > b_m$. Аналогично, поскольку $b > c$, то существует такой натуральный номер l, что $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$, ... , $b_{l-1} = c_{l-1}$, $b_l > c_l$. Обозначим $k = \min(m, l)$. Тогда $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, ... , $a_{k-1} = c_{k-1}$, $a_k > c_k$. Значит, $a > c$.

2) Пусть $c < 0$, $a \geqslant 0$. Тогда $a > c$.

3) Пусть $c < 0$, $a < 0$. Так как $a > b$, то по правилам сравнения $b < 0$. Тогда $|a| < |b|$, $|b| < |c|$, следовательно, $|a| < |c|$ (по доказанному в пункте 1). Значит, $a > c$. □

Ограниченные множества вещественных чисел.

Определение 24. *Пусть A — некоторое непустое множество вещественных чисел. Множество A называется* ***ограниченным сверху (снизу)****, если существует такое вещественное число M (m), что для всех элементов $a \in A$ выполнено неравенство: $a \leqslant M$ ($a \geqslant m$). Числа M и m называются соответственно* ***верхней и нижней гранями*** *множества M.*

Определение 25. *Число $M^* \in \mathbb{R}$ ($m^* \in \mathbb{R}$) называется* ***точной верхней (точной нижней) гранью*** *множества M, если: 1) неравенство $a \leqslant M^*$ ($a \geqslant m^*$) имеет место для всех элементов $a \in A$; 2) для любого вещественного числа x такого, что $x < M^*$ ($x > m^*$) найдется такой элемент $a' \in A$, что $a' > x$ ($a' < x$).*

Другими словами, точной верхней гранью множества называется наименьшая из его верхних граней; точной нижней гранью — наибольшая из нижних.

Обозначения: $M^* = \sup A$, $m^* = \inf A$ (от латинского supremum — наивысшее; infimum — наинизшее).

Теорема 4. *Если непустое множество A вещественных чисел ограничено сверху (снизу), то у него существует точная верхняя (нижняя) грань.*

Доказательство. Пусть множество A ограничено сверху (случай ограниченного снизу множества рассматривается аналогично). Обозначим через M какую-либо из верхних граней A. Возможны два случая.

1. Среди элементов множества A есть неотрицательные числа. В этом случае обозначим $A_0 = \{a \in A \,|\, a \geqslant 0\}$ и заметим, что $A_0 \neq \emptyset$. Любой элемент $a \in A$ имеет вид $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$. Поскольку $a \leqslant M$ для всех $a \in A_0$, то $a_0 \leqslant M$. Пусть тогда $\overline{a_0} = \max\{a_0 \,|\, a = a_0, a_1 \ldots a_n \cdots \in A_0\}$, то есть $\overline{a_0}$ — максимальная из целых частей элементов множества A_0.

Обозначим теперь $A_1 = \{a \in A_0 \,|\, a = \overline{a_0}, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\}$ и положим $\overline{a_1} = \max\{a_1 \,|\, a = \overline{a_0}, a_1 \ldots a_n \cdots \in A_1\}$ (то есть $\overline{a_1}$ — наибольший из первых знаков после запятой элементов множества A_1). Пусть $A_2 = \{a \in A_1 \,|\, a = \overline{a_0}, \overline{a_1} a_2 \ldots a_n \ldots\}$; $\overline{a_2} = \max\{a_2 \,|\, a = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots a_n \cdots \in A_2\}$ и так далее.

В результате получим бесконечную дробь $M^* = \overline{a_0}, \overline{a_1}\,\overline{a_2} \ldots \overline{a_n} \ldots$. Покажем, что $M^* = \sup A$.

1) Так как $M^* \geqslant 0$, то очевидно, что $a \leqslant M^*$, если $a < 0$. Пусть $a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \cdots \in A$, $a \geqslant 0$. Предположим, что $a > M^*$. Тогда существует такое натуральное число k, что $a_0 = \overline{a_0}, a_1 = \overline{a_1}, \ldots, a_{k-1} = \overline{a_{k-1}}$, $a_k > \overline{a_k}$. Но последнее неравенство противоречит построению числа M^*. Значит, $a \leqslant M^*$ для любого элемента $a \in A$.

2) Пусть $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ — произвольное вещественное число, меньшее, чем M^*. Очевидно, что если $x < 0$, то любой неотрицательный элемент $a \in A$ будет превосходить x. Предположим, что $x \geqslant 0$. Так как $x < M^*$, то найдется такой натуральный номер k, что $x_0 = \overline{a_0}$, $x_1 = \overline{a_1}, \ldots$, $x_{k-1} = \overline{a_{k-1}}$, $x_k < \overline{a_k}$. Поскольку (по построению числа M^*) $\overline{a_k} = \max\{a_k \,|\, a = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_{k-1}} a_k \cdots \in A_k\}$, то существует такой элемент $a' \in A_k$, что $a' = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_k} a_{k+1} \ldots$. Значит, $a' > x$.

Из пунктов 1), 2) следует, что число M^* действительно является точной верхней гранью множества A.

2. Осталось рассмотреть случай, когда множество A содержит только отрицательные элементы. Тогда будем производить аналогичные построения, только обозначим через $\overline{a_0}$ минимальную из целых частей элементов A (рассматриваемых без знака «$-$»), через $\overline{a_1}$ — минимальный из первых знаков после запятой и так далее. Перед получившейся дробью ставим знак «$-$». $\square$

Упражнение 4. *Пусть $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$. Докажите, что множество A не имеет точной верхней грани среди рациональных чисел.*

Арифметические операции над вещественными числами. Свойства вещественных чисел.

Лемма 1. *Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ — произвольное вещественное число. Тогда для любого рационального положительного числа ε найдутся такие рациональные числа α_1, α_2, что $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $a \geqslant 0$. В силу аксиомы Архимеда для произвольного рационального положительного числа ε найдется такое натуральное n, что $10^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Положим $\alpha_1 = a_0, a_1a_2 \dots a_n000\dots$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \dfrac{1}{10^n}$. Тогда получим, что $\alpha_1 \leqslant a$, $\alpha_2 \geqslant a$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \dfrac{1}{10^n} < \varepsilon$.

Если $a < 0$, то проведем аналогичную процедуру для числа $|a|$, затем перед получившимися дробями поставим знак $-$. □

Лемма 2. *Пусть $a = \pm a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$, $b = \pm b_0, b_1b_2 \dots b_n \dots$ — произвольные вещественные числа, $a > b$. Тогда найдется такое рациональное число α, что $a > \alpha > b$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Так как $a > b$, то существует такое натуральное k, что $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 \dots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k > b_k$. Поскольку мы не рассматриваем десятичные дроби с цифрой 9 в периоде, то найдется такой номер $p > k$, что $b = b_0, b_1 \dots b_k 99 \dots 9 b_p \dots$, где $b_p \neq 9$ (возможно, $p = k+1$). Положим $\alpha = b_0, b_1 \dots b_k 99 \dots 9(b_p+1)000\dots$. Тогда $\alpha > b$ (поскольку $b_p + 1 > b_p$) и $\alpha < a$ (поскольку $b_k < a_k$).

В случае, если $a > 0$, $b < 0$ можно взять $\alpha = 0$; если a и b — неположительные числа, то проделываем те же самые построения для их абсолютных величин. □

Лемма 3. *Пусть a, b — вещественные числа и пусть для любого рационального положительного числа ε найдутся такие два рациональных числа γ_1, γ_2, что $\gamma_1 \leqslant a \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant b \leqslant \gamma_2$, причем $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. Тогда $a = b$.*

Доказательство. Предположим, что $a \neq b$. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $a < b$. Тогда, согдасно лемме 2, найдутся два таких рациональных числа α_1, α_2, что $a < \alpha_1 < \alpha_2 < b$. Пусть ε — произвольное рациональное положительное число; γ_1, γ_2 — такие рациональные числа, что $\gamma_1 \leqslant a \leqslant \gamma_2$, $\gamma_1 \leqslant b \leqslant \gamma_2$ и $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. Тогда $\gamma_1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \gamma_2$, следовательно, $0 < \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. В силу произвольности выбора ε заключаем, что $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Это противоречит выбору чисел α_1 и α_2. Значит, наше предположение неверно, и $a = b$. □

Определение 26. ***Суммой*** *вещественных чисел a и b называется такое вещественное число x, что для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, выполняется двойное неравенство: $\alpha_1 + \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$.*

Обозначение: $x = a + b$.

Определение 27. *Пусть a и b — положительные вещественные числа. Их* ***произведением*** *будем называть такое вещественное число x, что для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $0 < \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, выполняется двойное неравенство: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2$.*

Для любого вещественного a по определению положим $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Пусть a, b — произвольные вещественные числа. Будем считать, что

$$a \cdot b = \begin{cases} |a| \cdot |b|, & a \text{ и } b \text{ одного знака}, \\ -|a| \cdot |b|, & a \text{ и } b \text{ разных знаков}. \end{cases}$$

Обозначение $x = a \cdot b$.

Теорема 5. *Для любых вещественных чисел a, b существует единственное вещественное число x такое, что $x = a + b$.*

Доказательство. 1) (существование). Рассмотирм множество

$$A = \{(\alpha_1 + \beta_1) \,|\, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q}, \alpha_1 \leqslant a, \beta_1 \leqslant b\}.$$

Заметим, что A не пусто и ограничено сверху (например, числом $(\alpha_2 + \beta_2)$, где $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$). Значит, существует $\sup A = x$. Покажем, что число x удовлетворяет определению суммы. Действительно, поскольку x — верхняя грань A, то $x \geqslant \alpha_1 + \beta_1$, если $\alpha_1 \leqslant a$, $\beta_1 \leqslant b$. С другой стороны, поскольку x — точная грань, то $x \leqslant \alpha_2 + \beta_2$, если $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$ (так как число $(\alpha_2 + \beta_2)$ — одна из верхних граней A). Значит, $x = a + b$.

2) (единственность). Пусть x_1, x_2 — такие вещественные числа, что $x_1 = a+b$, $x_2 = a+b$. Покажем, что $x_1 = x_2$. Возьмем произвольное рациональное число $\varepsilon > 0$. По определению для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $\alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$, $\beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\beta_2 - \beta_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2 + \beta_2, \\ \alpha_1 + \beta_1 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2 + \beta_2 \end{cases}$$

(можем выбрать такие α_1, α_2, β_1, β_2 в силу леммы 1). Тогда

$$(\alpha_2 + \beta_2) - (\alpha_1 + \beta_1) = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\beta_2 - \beta_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но это означает, в силу произвольности выбора ε, что $x_1 = x_2$ (лемма 3). Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. *Для любых вещественных чисел a, b существует единственное вещественное число x такое, что $x = a \cdot b$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать теорему для случая $a > 0$, $b > 0$.

1) (существование). Рассмотирм множество

$$A = \{(\alpha_1 \cdot \beta_1) \,|\, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha_1 \leqslant a, 0 < \beta_1 \leqslant b\}.$$

Заметим, что A не пусто и ограничено сверху (например, числом $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$, где $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$). Значит, существует $\sup A = x$. Покажем, что число x удовлетворяет определению произведения. Действительно, поскольку x — верхняя грань A, то $x \geqslant \alpha_1 \cdot \beta_1$, если $0 < \alpha_1 \leqslant a$, $0 < \beta_1 \leqslant b$. С другой стороны, поскольку x — точная грань, то $x \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2$, если $\alpha_2 \geqslant a$, $\beta_2 \geqslant b$ (так как число $(\alpha_2 \cdot \beta_2)$ — одна из верхних граней A). Значит, $x = a \cdot b$.

2) (единственность). Пусть x_1, x_2 — такие вещественные числа, что $x_1 = a \cdot b$, $x_2 = a \cdot b$. Покажем, что $x_1 = x_2$. Возьмем произвольное рациональное число $\varepsilon > 0$. По определению для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих условиям $0 < \alpha_1 \leqslant a \leqslant \alpha_2$,

$0 < \beta_1 \leqslant b \leqslant \beta_2$, $\alpha_2 - \alpha_1 < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\beta_2 - \beta_1 < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $M = \max\{[a],[b]\} + 1$, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 0 < \alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2, \\ 0 < \alpha_1 \cdot \beta_1 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2 \cdot \beta_2 \end{cases}$$

(можем выбрать такие α_1, α_2, β_1, β_2 в силу леммы 1). Тогда

$$(\alpha_2 \cdot \beta_2) - (\alpha_1 \cdot \beta_1) = \alpha_2(\beta_2 - \beta_1) + \beta_2(\alpha_2 - \alpha_1) < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Но это означает, в силу произвольности выбора ε, что $x_1 = x_2$ (лемма 3). Теорема доказана полностью. □

Свойства вещественных чисел.

1) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$ или $a > b$ или $a = b$ (следует из правил сравнения);

2) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ существует единственное число $c \in \mathbb{R}$: $c = a + b$ (следует из теоремы 5);

3) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ существует единственное число $c \in \mathbb{R}$: $c = a \cdot b$ (следует из теоремы 6);

4) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (следует из утверждения о транзитивности знака $>$); если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (очевидно).

Свойства 5)—13) вытекают из определений суммы и произведения вещественных чисел и из соответствующих свойств рациональных чисел:

5) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$;

6) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

7) существует единственное число $0 \in \mathbb{R}$: $a + 0 = 0 + a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$;

8) для любого числа $a \in \mathbb{R}$ существует единственное число $a' \in \mathbb{R}$: $a + a' = 0$;

9) для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = b \cdot a$;

10) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

11) существует единственное число $1 \in \mathbb{R}$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$;

12) для любого числа $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, существует единственное число $a' \in \mathbb{R}$: $a \cdot a' = 1$;

13) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Определение 28. *Разностью вещественных чисел a и b называется такое вещественное число c, что $a = c + b$.*

Проверим, что разностью чисел a и b является число $a + b'$, где b' — обратный к b по сложению. Действительно, $(a + b') + b = a + (b' + b) = a + 0 = a$.

Докажем теперь единственность. Пусть d — такое вещественное число, что $a = d + b$. Тогда $c = a + b' = (d + b) + b' = d + (b + b') = d + 0 = d$.

Обозначение: $c = a - b$. Из определения следует, что если b' — обратный к b по сложению, то $b' = 0 - b$. Обозначение: $b' = -b$.

Определение 29. *Частным вещественных чисел a и b ($b \neq 0$) называется такое вещественное число c, что $a = c \cdot b$.*

Обозначение: $c = \dfrac{a}{b}$. Можно показать, что частное определено единственным образом и что если $b \neq 0$, то $\dfrac{a}{b} = a \cdot b'$, где b' — обратный к b по умножению. При этом из определения следует, что $b' = \dfrac{1}{b}$.

14) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Докажем это свойство. Согласно лемме 1, найдутся такие два рациональных числа α_1, β_2, что $a > \alpha_1 > \beta_2 > b$. Обозначим $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_2$. Тогда ε — положительное рациональное число. Значит, существуют такие рациональные γ_1, γ_2, что $\gamma_1 \leqslant c \leqslant \gamma_2$, $\gamma_2 - \gamma_1 < \varepsilon$. Выберем еще произвольные рациональные числа α_2, β_1, для которых выполнено: $\alpha_2 > a$, $\beta_1 < b$. Тогда по определению суммы получим: $\alpha_1 + \gamma_1 \leqslant a + c \leqslant \alpha_2 + \gamma_2$, $\beta_1 + \gamma_1 \leqslant b + c \leqslant \beta_2 + \gamma_2$. Заметим теперь, что $(\alpha_1 + \gamma_1) - (\beta_2 + \gamma_2) = (\alpha_1 - \beta_2) - (\gamma_2 - \gamma_1) = \varepsilon - (\gamma_2 - \gamma_1) > 0$, то есть $\alpha_1 + \gamma_1 > \beta_2 + \gamma_2$. Отсюда и из транзитивности знаков неравенства следует, что $a + c > b + c$.

15) для любых чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$: если $a > b$, $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$;

Упражнение 5. *Докажите.*

16) Каково бы ни было число $a \in \mathbb{R}$, можно число 1 повторить столько раз, что сумма превзойдет a.

Действительно, если $a \leqslant 0$, то можно взять $n = 1$; если же $a = a_0, a_1 \ldots a_n \cdots > 0$, то положим $n = a_0 + 1$.